# 神経システムと代数幾何 : 数学 (神経システムと代数幾何) (離散力学系の分子細胞生物学への応用数理)



小林, 正典; 佐藤, 宏平

数理解析研究所講究録
第 1698 巻 2010 年 172-182



# 神経システムと代数幾何（数学）

首都大学東京 理工学研究科
小林 正典
離散力学系の分子細胞生物学への応用数理
2009年1月8日

講演者：（数学）小林正典（首都大学東京）
『神経システムと代数幾何』

書記：（数学）佐藤宏平（首都大学東京）

## 自己紹介

専門：代数幾何，および関連する数理科学

東京大学 理・数学 博士課程中退
1991年：東京工業大学
2000年：東京都立大学，首都大学東京

上司　NOといえる日本
私　脳・・・といえる？

・自己紹介：数学の代数幾何，及び関連する数理科学を専門としている．
・経歴：東京大学 理学研究科 数学専攻 博士課程中退
東京工業大学（1991～1999）
東京都立大学，首都大学東京（2000～）

## 目次

システムとしての代数幾何

学習理論への応用例

・本講演の目次：
「システムとしての代数幾何」
代数幾何と，脳の神経ネットワークとに，アナロジーが成立するのではないか？ということを説明する．

「学習理論への応用」
情報，特に学習理論には，代数幾何が使われている例があり，これを紹介する．

## 代数幾何の源流

- アポロニオス（250-190BC）『円錐曲線論』
- デカルト（1596-1650） 座標・解析幾何
- パスカル（1623-1662）『円錐曲線試論』
- リーマン（1826-1866） リーマン面，多様体，楕円函数論，・・・

・代数幾何とは何か？
代数幾何は古くに源流がある．例として，

（１）アポロニウス（古代ギリシア）「円錐曲線論」→円錐を切るとき，その切り口が楕円・放物線・双曲線になることを研究した．

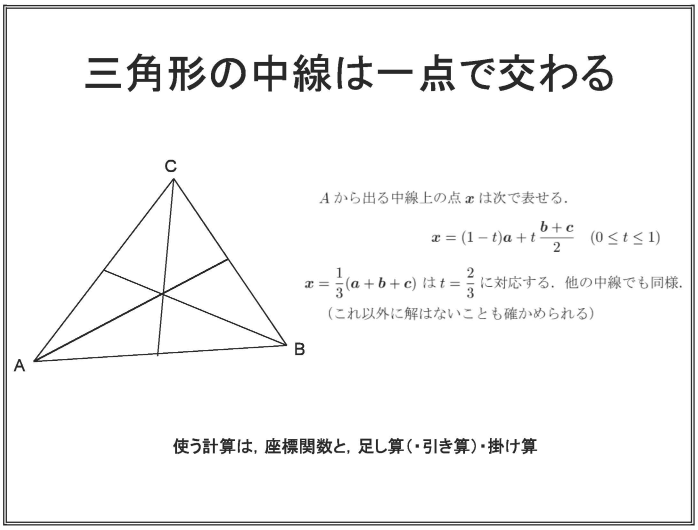
（２）暗黒時代・・・．

（３）デカルト「座標・解析幾何」→座標を数値で表し（数学的な定規を作った），図形等の幾何的な対象の性質を計算によって調べる解析幾何を創始した．

（４）パスカル「円錐曲線試論」→パスカルの定理を証明した．この定理は，代数幾何を計算技術という側面から見た場合に，その源流の一つとして見ることができる．

（５）近・現代の代数幾何の原理は１９世紀から始まる．

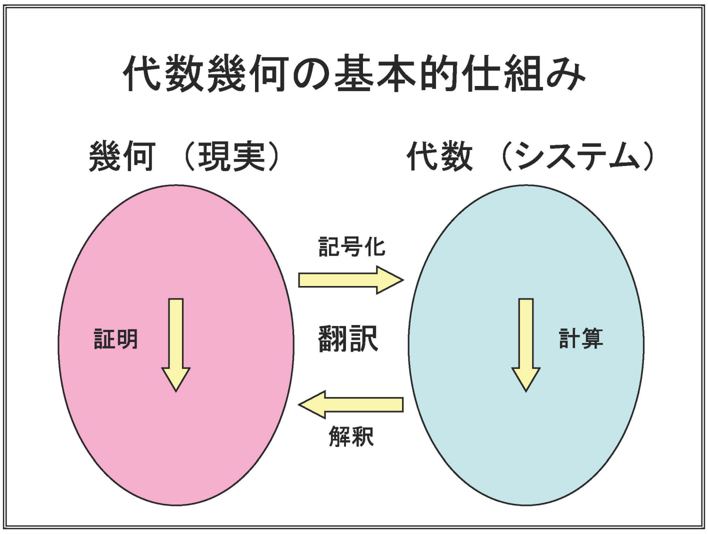
（６）リーマン「リーマン面・多様体・楕円関数論,…」→どのように空間を数学的に表現し，考えるか？ということを研究した．また，代数幾何の問題を与えた．




・解析幾何とはどういうことをする？
例えば，現代風の簡単な例として「三角形の中点は１点で交わる」という命題の証明を挙げる．

点は実数の組（平面ベクトル）で表される．直線上の点はパラメータ表示される．条件を満たす点の存在は，対応する方程式を満たすパラメータの存在に置き換えられる．

図形の性質を，座標関数の言葉に置き換えて，足し算・引き算・掛け算という代数計算によって示した．




・代数幾何の基本的な仕組みとは？
現実の幾何で何か（図形等の幾何学的対象に対する命題）を証明しようとした時に，直接証明するのが大変な場合，代数というシステム（例えば座標関数など）を用いる．
まず，幾何学的対象を記号化する（例えば先の例で言うと，図を座標関数で表す）．すると，代数というシステムが利用でき，計算（例えば，代入や連立一次方程式を解くこと）ができるようになる．この計算によって出た結果を幾何学的に解釈する．

このような翻訳システムの枠組み自体は普遍的に利用できるものではないか？

## 代数幾何の対象

- 局所
  - 多項式条件を満たす変数の組で表される
  - 条件によっては，線形近似できない特異点をもつ
- 大域
  - 局所近傍を代数的な関数を用いて貼り合せる
  - 代数多様体

・代数幾何はどういうものを対象にするか？

代数幾何の対象を「局所」と「大域」に分けて説明する．

「局所」→図形は局所的には，座標系・多項式を用いて，ある多項式条件を満たす変数の組で表される．図形は，ある多項式系の共通零点集合として局所的に見る．条件によっては線形近似できない特異点が出てくるが，こういったものも扱うことができる．

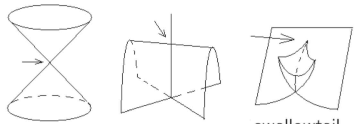
「大域」→こういった局所的な座標系を貼り合わせて（代数的な関数による変数変換により同一視して）大きな図形を扱うことができる．このようなものの中で性質のよいものを代数多様体という．

## 特異点

曲線

node $y^2 = x^2(1+x)$　cusp $y^2 = x^3$　tacnode $y^2 = x^4$

曲面



ODP $x^2 + y^2 = z^2$　pinch point $x^2 y = z^2$　swallowtail

・特異点とはどのようなものか？

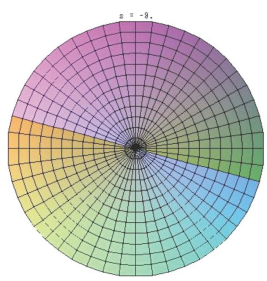
（１） １次元の特異点の例

node と呼ばれる交点になっている点は，その近くでは $y^2=x^2$ とだいたい近い方程式で表わされる．また，cusp, tacnode はそれぞれ $y^2=x^3$, $y^2=x^4$ と表される．

（２） ２次元の特異点の例

ODP（Ordinary Double Point，図の矢印の点）は $x^2+y^2=z^2$ で表わされる．また，pinch point は $x^2y=z^2$ で表わされる．swallowtail という複雑な図も特異点の一つ．

## 平面の爆発

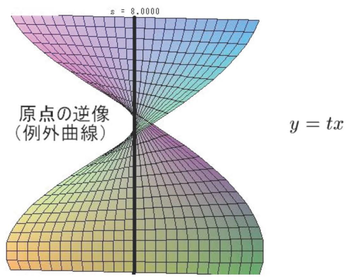


・特異点の解消とは？

特異点を解消する一つの例として「爆発（blowup）」がある．

図の真ん中の点を原点とし，横に x 軸，縦に y 軸が入っていると思う．この平面を真ん中の点で爆発すると，次の様に図形は変わる．

## 平面の爆発




・爆発したときの図

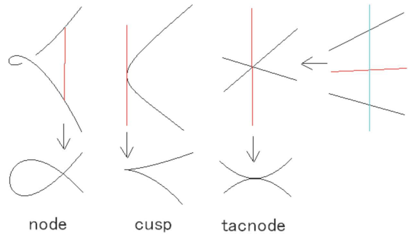
＊この図は，先の平面を立体的に引き延ばしたようになっている．

＊図の太線の上と下は，無限の所でつながっている．

＊図の中のほとんどの点は，先の平面の時と変わらないが，真ん中の点（太線上の点）は増えている．真ん中は原点一点だけだったが，爆発（y=tx と表せる）により「例外曲線」と呼ばれる直線になった．原点への近づき方により，別の点に対応する．

＊先の平面の原点に特異点がある場合，この爆発により特異点がよくなる．

## 特異点解消




**実数，複素数などを係数とする代数多様体では，特異点は爆発の繰り返しで解消できる（広中）**

・特異点解消の様子

図は特異点解消の様子を表したもの．

＊node の解消→交点（分岐点）で爆発すると交点がなくなる．同じだった点は，それぞれ分岐点への近づき方が違うので，二つの異なる点に対応する．こうして普通の曲線になる．

＊cusp の解消→尖った点で爆発することにより解消される．

＊tacnode の解消→二回爆発をすれば解消される．

実数，複素数などを係数とする代数多様体では，特異点は爆発の繰り返しで解消できる．（広中の特異点解消定理）

## 実数と複素数

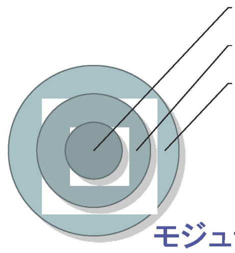
- 複素数で考えると，点と関数の対応がきれい．
（代数学の基本定理，Hilbertの零点定理）

- 実数は，複素共役の固定点
  x＋i y → x－i y

- 実数の場合，平面曲線の特異点は，分枝が1つならば爆発で移りあう．[－，Kuo]

176

## 幾何の対象



| | 関数のクラス |
|---|---|
| 代数多様体 | 多項式など |
| 可微分多様体 | 微分可能 |
| 位相多様体 | 連続 |

モジュライ：1つの下部構造に対し，複数の上部構造がありうる

例：球面（複素射影直線）上の4点，楕円曲線　$y^2 = 4x^3 - px - q$

・実数を係数とする代数多様体と複素数の場合との違い

代数幾何を何かに応用しようとすると，実数をパラメータとして考えたいと思うであろう．しかし，実際に代数幾何を研究する場合には，複素数上で考えることが多い．

なぜならば，幾何と代数の対応関係を付けようとすると，複素数上で考えた方が楽である．代数学の基本定理， Hilbert の零点定理により，点と関数が奇麗に対応する．実数だと零点が出ない場合がある (例　$1+x^2$)

・実数で考える場合にはどうするか？

複素共役の固定点として考えることができる．これは一つの例であり，全ての場合にこの考え方が適用できるわけではない．

・実数で考えた場合に起こる特殊例

実数の場合には，平面曲線の特異点は，分岐が１つならば爆発で移りあう．特異点を解消すると，解消が同じものになる．

・幾何の対象と代数幾何の対象

代数幾何→主に代数多様体を対象とする．幾何の対象の中では非常に小さい対象を扱っている．が，応用上は近似定理によって，位相多様体であっても十分に代数多様体で扱える．

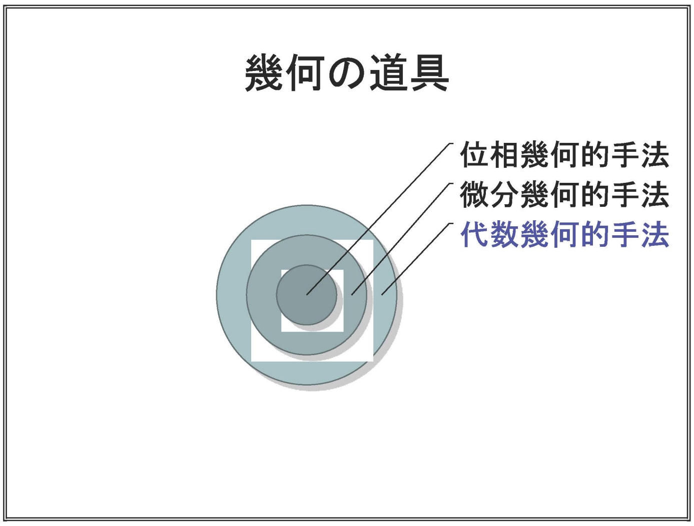
微分幾何→主に可微分多様体を対象とする．微分が扱える．

位相幾何→トポロジーとも呼ばれる．主に位相多様体を対象とする．微分は出来ないが，広いクラスの図形を扱える．

・代数多様体は小さいクラスだからこそ役立つこともある

＊応用上，典型的な図形・さまざまな量が計算できる図形は，代数多様体で扱えることが多い．モデルとしても単純な方程式で与えられることは便利である．

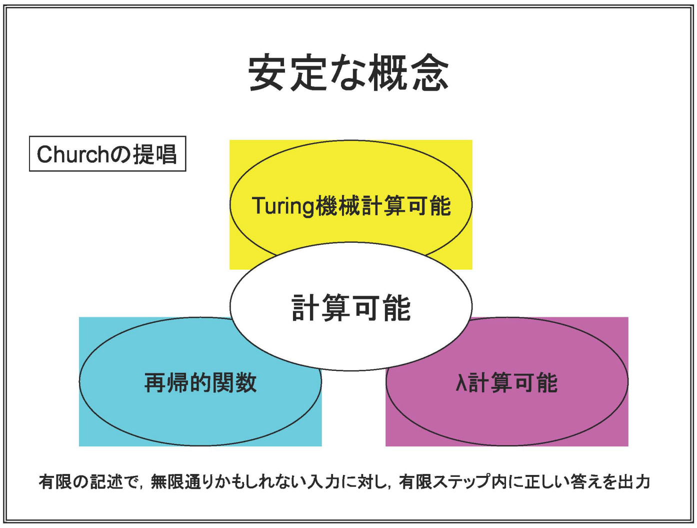
＊モジュライを扱える．例えば，球面の上に４点を配置することを考えた場合，微分多様体・位相多様体では４点は同じものとしてしか見ることができないが，代数多様体では４点の配置は違うものとして見られる．また，楕円曲線を考えた場合，代数多様体でのみ p と q というパラメータにより異なる曲線が出てくる．




・道具に関する代数幾何の利点

代数幾何では，微分幾何的な手法も位相幾何的な手法も使える．対象を深く理解することができる．

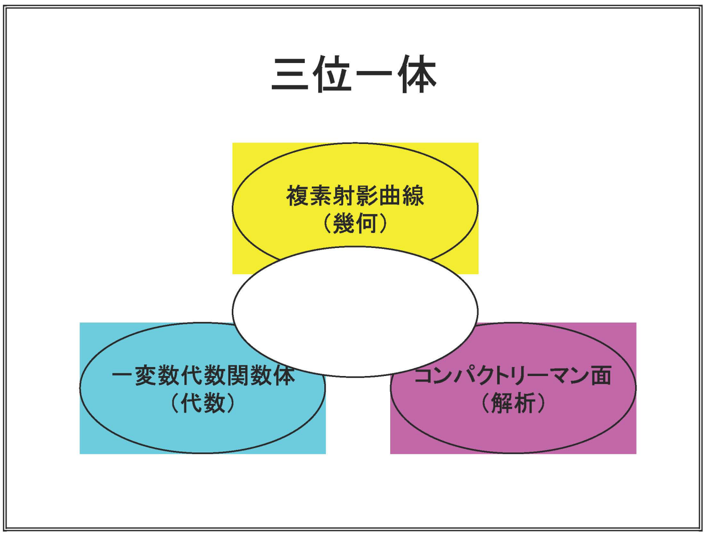
代数幾何の紹介はこの程度にして，アナロジーに入る．




・どのようなものが本質的な概念か？

「安定な概念」

「Turing 計算可能」，「λ 計算可能」，「再帰的関数」という三つの概念が，等価であるということが示された．これらは，定式化の方法が違うため見かけは大きく異なるが，どれも「有限の記述をもっていて，無限通りかもしれない入力に対し，有限ステップで正しい答えを返す」というシステムに対応している．アプローチの違いにも関らずいくつもの枠組みで等価な概念が得られたので，本質的な概念であろうと思われる．Church の提唱により，まとめて「計算可能」という．




・代数幾何における「安定な概念」の例

代数学の対象である「一変数代数関数体」と，幾何学の対象である「複素射影曲線」と，解析学の対象である「コンパクトリーマン面」という三つの異なる分野の対象の同型類が等価であることがいえる．これは何か本質的な対象なのではないだろうか？という見方ができる．

## さまざまな代数構造を選べる

- 体上有限生成の可換環（代数多様体）
- 可換環（スキーム）
- 体上有限生成な半群で生成された可換環（トーリック多様体）
- Max-Plus代数・可換半環（トロピカル多様体）
- 非可換環（？）

・代数幾何の手法

どのような代数構造を使ってものを調べるか？

局所構造が・・・

「体上有限生成の可換環」→「代数多様体」

「可換環」→「スキーム」

「有限生成な半群で体上生成された可換環」→「トーリック多様体」

「Max-Plus 代数・可換半環」→「トロピカル多様体」

「非可換環（微分作用素など）」→「非可換多様体？」

という様に，代数構造の取り方によって代数幾何の対象が決まる．

## システムの「暴走」

- 現実の現象を理解するためのシステムだったはず.
- しかし，そのうちシステムに現実を合わせようとする.
- どんな可換環に対しても，何らかの空間の局所的な関数の全体(座標関数で生成される環)と思うことにする.（スキーム）
- 代数の手法に合っている. 計算では自然で便利.
- 数論的環においても，幾何的手法を利用できる.
- 完全に毒されると，違和感を感じない. むしろ，古典的な空間概念のほうがおかしく感じられる.

・システムと現実の乖離

もともと代数幾何では，代数のシステムは幾何的な内容を写し取るものであった（先の例では三角形の中点を示す為に代数演算を用いた）．しかし，だんだん便利なシステムの方に現実をあわせるようになった．その例がスキーム．

スキームは代数の手法に合っていて，慣れると自然に感じられる．数論的環においても幾何的手法を利用できるようになる．

## 現実の「消失」

- 代数こそが，自分にとっての真実
- 現実は観測によってのみ感知される.
- 対象は実在するのか？
- 対象の間の関係のみが確からしい.（圏）
- 点集合としての空間モデルの消失
  - 異なる点集合でも，観測される総体が同じであれば，区別できない(圏同値). 積極的に，幾何的対象として同一視する.

導来圏こそが空間(の観測量の全体)を表す

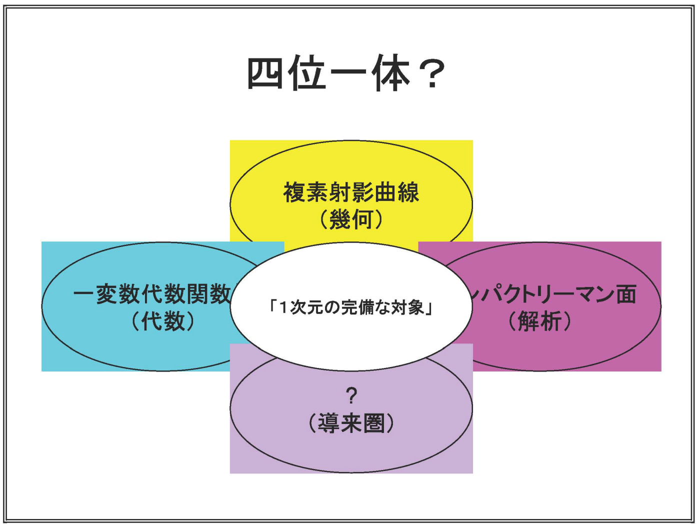
・システムが暴走し，更に現実が消失していく

現実（幾何）は観測によって感知されるため，対象が本当に実在するのかどうか直接わかるわけではない．

対象の間の関係のみが確からしいという数学（「圏」という数学）を扱う．

この「圏」という概念では，点集合としての空間モデルが消失する．導来圏というものこそが空間の観測量の全体を表すことになる．

簡単にまとめると，（１）初等幾何のように，幾何的図形を生のままで扱う状態から，（２）解析幾何のように，記号化して代数演算で処理し翻訳するシステムで幾何を理解するようになり，（３）スキーム理論のように，システムと相性がよいように幾何自体の枠組みを変更していき，（４）導来圏のように，幾何の実体がなくてもシステム自体が果実を生み出すようになる．




・一次元の場合は三位一体が四位一体？

　例えば，一次元の場合には導来圏として圏同値であることと複素射影曲線として同型であることは全く等価になる．

　これらの四つの対象をまとめると「（複素）１次元の完備な対象」というものが見えてくる．ただし高次元の場合にはここまで奇麗な話にはならない．

ここからは学習理論との関りについて紹介する．

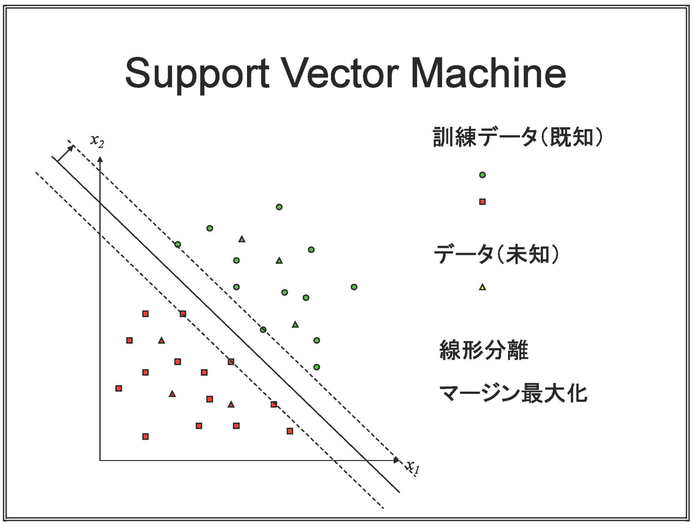
## 学習理論

- 例：パーセプトロン，SVM
- 確率論的学習理論
  - 連続，代数幾何を計算手法として用いた（渡辺澄夫）
- 計算論的学習理論
  - 離散，代数幾何によりモデルを作った

・学習理論の紹介

　＊「パーセプトロン」や「SVM (support vector machine)」が例．

　＊代数幾何との関連では「確率論的学習理論」や「計算論的学習理論」がある．

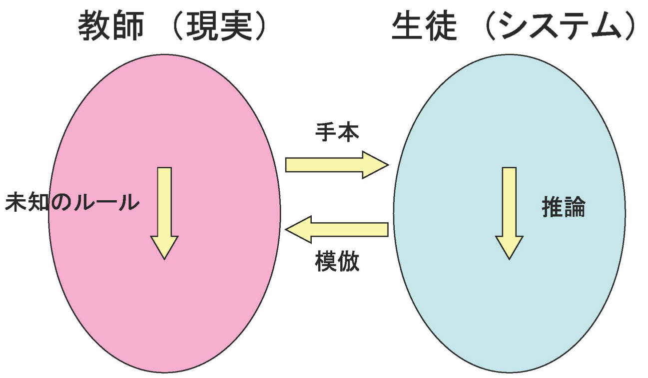



・SVM の紹介

＊目的としては，訓練データ（既知）を線形分離し，その際にマージン最大化し（図の矢印を support vector といい，これをできるだけ長くとる）間違いを起こりにくくすること．

＊未知のデータが来たときに，どの領域に入っているかを認識する．

## 学習理論（教師つき）




・学習理論（教師付き）
学習の見方として，図のような考え方ができる．手本を増やすことで，推論を繰り返し，模倣の精度を上げる．

## 確率論的学習理論

- 出力 x から，正答 y を推測する確率
  p(y | x, w) （w：パラメータ）
- wを動かし教師の正答 q(y | x)に近づける．
  （学習曲線）

- qに近づけるwの全体は，特異点をもつ．
- 特異点解消で学習曲線の振舞いが計算できる．
- 詳しくは，福水先生に．

・確率論的学習理論
＊出力 x から，正しい答え y を推測する確率 p(y|x,w)とする（w はパラメータ）．パラメータ w ごとに確率が違う．
＊w を動かして，正答 q(y|x)に近づける．
この軌跡を学習曲線という．
＊q に近づけるパラメータ w の全体は特異点を持つが，特異点を解消することにより，学習曲線の振舞いが計算できる．180に代数幾何が使われている．

## 計算論的学習理論（正データ学習）

- 2
- 3
- 5
- 8
- 13
- 21
- a(n+2)=a(n+1)+a(n)

・計算論的学習理論（正データ学習）の例
「２→３→？
？には何が来る？
４かな？でもそれじゃ簡単すぎるし・・・.
２→３→５→？
？には何が来る？
７かな？素数を並べている？
８かな？階差数列？
２→３→５→８→？
？には何が来る？
１２かな？階差数列？
２→３→５→８→１３→？
？には何が来る？
２１だ！フィボナッチ数列！！」
例からデータを取り，ルールについての仮説を作る．仮説は修正してよい．正しいルールを見つけると，それからずっと答えが合い続けるようになる．

## 正データ極限学習

- 教師が，ある言語族のひとつの言語に属する文を枚挙する.
- 生徒はどの言語であるか推定する.
- 枚挙とともに推定は変えてもよい.
- 十分枚挙されたあと，正しい推定を永久に続けることができるとき，極限同定可能という.

・正データ極限学習

教師が，ある（情報学の）言語族の一つの言語に属する文を枚挙する（先の例の数字を次々に与えていくような作業）．これに対し，生徒はどの言語であるか推定する（先の例のフィボナッチ数列であるというルールを見つけ出す作業）.

## イデアルと有限の弾力性

定理[一，徳永，山本] $R$:可換環
$R$のイデアル全体が正データから極限同定可能
⇔ $R$が有限の弾力性を持つ
⇔ $R$ がNoether環

定理 $R$: 可換環
$T$がイデアル $I$ の特徴例集合
⇒ $T$が $I$ の有限基底

・正データ極限学習と代数幾何との関係

＊数学の可換環（代数幾何ではよく出てくる概念）を考えた場合に，環がネーター環であることと，有限の弾力性を持つこと，即ち有限回の学習で正答が出せることと対応している.

＊有限の弾力性とは何か？

先の例では，数字をある回数まで提示されたらフィボナッチ数列というルール以外にはルールが見つからないようになっていたが，そうでなく何回提示されてもルールが定まらないような場合を環論の言葉で言い換えると「無限の弾力性」を持つといい，無限の弾力性を持たない場合を「有限の弾力性」を持つという.

## イデアルの和集合

- イデアル族に対し，有限な生成集合を与える.
- 有理数体上有限生成多項式においては，正データから極限同定可能.
- イデアルの和集合についても同様.
- 従来の代数幾何では考えていなかった.

先の定理で，「イデアル」という言葉があったが，これは数学の環論の概念で，自然数の一種の拡張である．イデアルの和集合は幾何との対応では普通扱わないが，学習理論とのつながりによって意義を見出した.

## 議論のタネ？ネタ？

- モデルの圏化(categorification)
- 空間の量子化・離散化，時間発展・形態変化
  - 異なる描像を用いて
- 数学的実在はあるか.
  - 『考える物質』(ジャン・ピエール・シャンジュー，アラン・コンヌ)：
  - 『唯脳論』(養老孟司)：否定的
  - 『怠け数学者の記 』(小平邦彦)：「数覚」

・ モデルの圏化(categorification)
　有限の知恵で現実世界を考えること.

・数学的実在はあるか？
　＊例えば，数学者は「２次元球面が在るか？」と問われると「在る」と答えるであろう.
　＊有名な論争があり，『考える物質』（ジャン・ピエール・シャンジュー、アラン・コンヌ）→アラン・コンヌは「在る」，ジャン・ピエール・シャンジューは「錯覚である」という立場.
　＊『唯脳論』（養老孟司）はその存在に対し否定的
　＊『怠け数学者の記』（小平邦彦）次のような「数覚」というものについてふれている.

## 『怠け数学者の記 』(小平邦彦)

　数学が明晰判明に分かるというとはどういうことだろうか。数学とは森羅万象の根底に厳然と実在する数学的現象を研究する学問である。だから、数学が分かる とは、その数学的現象を『見る』ことである。『見る』とは或る種の感覚によって知覚することであり、私はこれを数覚と呼ぶ。数覚は論理的推理能力とは異なる純粋な感覚で、聴覚の鋭さと同様、頭の良し悪しとは関係ない。だから、数学が分かるとは、数学的現象を感覚的に把握することであって、論理だけではどう にもならない。結局、数学が分かるとは、すなわち自ら体験することである。

講演時の質問の内容：

・圏の代数演算を増やすことで，認知できるものの働きが増え，入力に対する出力が増えるようなモデルが作れないのだろうか？サルからヒトへの変化とのアナロジー.

・ 代数幾何と数理論理学のかかわり…普通の代数幾何をやっている時は，基礎付けをそこまで気にしない．ただし実代数幾何などで，関係する問題も存在する.